## 基础课07 函数的单调性与最值

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 函数的单调性与最值 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年北京卷  2021年全国甲卷（文） | ★★★ | 数学运算直观想象逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，函数的单调性与最值是高考常考内容，一般以选择题或填空题的形式出现，试题较为简单.命题热点为函数单调性的应用，会结合基本初等函数或几个基本初等函数组成的复合函数进行考查.预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、函数的单调性

1.单调函数的定义

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 增函数 | 减函数 |
| 定义 | 一般地，设函数的定义域为，区间，如果， | |
| 当时，都有①，那么就称函数在区间上单调递增，特别地，当函数在它的定义域上单调递增时，我们就称它是增函数 | 当时，都有②，那么就称函数在区间上单调递减，特别地，当函数在它的定义域上单调递减时，我们就称它是减函数 |
| 图象 |  |  |
| 描述 | 自左向右看图象是上升的 | 自左向右看图象是下降的 |

2.单调区间的定义

如果函数在区间上③单调递增或单调递减，那么就说函数在这一区间具有（严格的）单调性，④区间叫作的单调区间.

【提醒】函数单调性是函数的局部性质,单调区间为定义域的子集.

##### 二、函数的最值

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 前提 | 一般地，设函数的定义域为，如果存在实数满足 | |
| 条件 | （1），都有⑤；  （2），使得⑥ | （1），都有⑦；  （2），使得⑧ |
| 结论 | 为最大值 | 为最小值 |

###### 知识 拓展

对，且，有或在区间上单调递增（减）.

#### 诊断自测

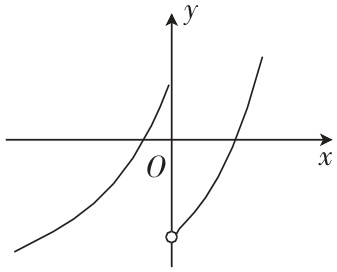
##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 若定义在上的函数满足，则函数在上为增函数.( × )

（2） 若函数在上是增函数，则函数的单调递增区间是.( × )

（3） 若函数的图象如图所示，则函数的单调递增区间是.( × )



（4） 所有的单调函数都有最值.( × )

2. （易错题）若函数是定义在上的减函数，且，则实数的取值范围是.

**【易错点】**本题容易忽视的定义域.

[解析]由条件知解得.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修①P86·T7改编）函数的最大值为8.

[解析]因为函数的图象开口向上，对称轴为直线，所以的单调递减区间为，单调递增区间为，因为，，所以函数在上的最大值为8.

4. （人教A版必修①P86·T7改编）若函数在上单调递增，则实数的取值范围为.

[解析]设,且，则.因为,，所以，又，所以，因为在上单调递增，所以，所以，即，即，所以实数的取值范围为.

##### 题组3 走向高考

5. [2022·上海卷改编]若函数为增函数，则实数的取值范围为.

[解析]因为为上的增函数，所以

解得,故实数的取值范围为.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 函数的单调性（区间）［多维探究］

##### 求具体函数的单调区间角度1

典例1 （多选题）下列函数在上单调递增的是( AC ).

A. B. C. D.

[解析]与为上的增函数，

为上的增函数，故正确；

由的图象知，不正确；

由,得，

在上为增函数，故正确；

的定义域为，故不正确.

故选.

##### 利用定义证明函数的单调性角度2

典例2 试讨论在上的单调性.

[解析]设，

则，

因为，所以,,，

故当时，，即，函数在上单调递增；

当时，，即，函数在上单调递减.

变式设问 若函数在上单调递减，则的取值范围是.

[解析]根据题意，设,则,因为,,所以要使,只需恒成立，所以.综上，的取值范围为.



**求函数的单调性或单调区间的方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 一般步骤为设元作差变形判断符号得出结论 |
| 图象法 | 若函数是以图象形式所给出的，或者的图象易作出，则可由图象的上升或下降的情况确定函数的单调区间 |
| 性质法 | 对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各基本初等函数的增减性及“增增增，增-减增，增减，减减减，减-增减，减增”来判断 |
| 复合法 | 对于复合函数，先将函数分解成和，然后分别讨论（判断）这两个函数的单调性，再根据复合函数“同增异减”的规则进行判断 |

##### 多维训练

1. 函数的单调递增区间是( C ).

A. , B. C. ， D.

[解析]令，解得，令，，则，

因为函数在，上单调递增，在，上单调递减，在定义域内单调递增，在上单调递增，

所以根据复合函数的单调性可知，函数的单调递增区间是，.

故选.

2. 用定义法证明函数在,上单调递增.

[解析]设，则，

因为，所以,,，

所以，即，所以函数在,上单调递增.

#### 考点二 求函数的最值［师生共研］

典例3（1） 设函数在上的最大值和最小值分别为，,则( B ).

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

[解析]因为，所以在上单调递减.

因为函数在上的最大值和最小值分别为,，

所以，,所以.故选.

（2） 已知设,则函数的最大值是( B ).

A. B. 1 C. 2 D. 3

[解析]当，即时，在上单调递增，所以；

当，即时，，则在上单调递增，在上单调递减，因为，，所以.

综上，函数的最大值为1.故选.



**求函数最值的五种常用方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 单调性法 | 先确定函数的单调性，再由单调性结合端点值求最值 |
| 图象法 | 先作出函数的图象，再观察其最高点、最低点，求出最值 |
| 基本不等式法 | 先对解析式变形，使之具备“一正二定三相等”的条件，然后用基本不等式求出最值 |
| 导数法 | 先求出导函数，然后求出在给定区间上的极值，最后结合端点值，求出最值 |
| 换元法 | 对于比较复杂的函数，可通过换元转化为熟悉的函数，再用相应的方法求最值 |

##### 针对训练

1. 设函数则的最小值是.

[解析]当时，的最小值为0，

当时，（当且仅当时，取“”）.

因为，所以.

2. 对于任意实数，，定义设函数，，则函数，的最大值是1.

[解析]依题意，

当时，是增函数，

当时，是减函数，

因此在时取得最大值，最大值为.

#### 考点三 函数单调性的应用［多维探究］

##### 比较大小角度1

典例4 已知定义在上的函数满足以下条件：①函数的图象关于直线对称；②对任意,，当时，都有，，的大小关系为( B ).

A. B.

C. D.

[解析] 函数的图象关于直线对称，且对任意,，当时，都有，

在上单调递减，在上单调递增，

又，.故选.



**利用函数的单调性比较大小的方法**

在比较函数值的大小时，若自变量的值不在同一个单调区间内，则需要利用函数的性质，将自变量的值转化到同一个单调区间内进行比较.对于选择题、填空题通常选用数形结合的方法进行求解.

##### 解函数不等式角度2

典例5 已知是定义在上的减函数，且，则实数的取值范围是( A ).

A. B. C. D.

[解析]因为是定义在上的减函数，且，

所以解得，所以实数的取值范围为.故选.



求解函数不等式，其实质是函数单调性的逆用，利用函数的单调性将“”符号脱去，转化为关于自变量的不等式求解，应注意函数的定义域.

##### 由函数单调性求参数的取值范围角度3

典例6 [2023·新高考Ⅰ卷]设函数在区间上单调递减，则的取值范围是( D ).

A. B. C. D.

[解析]因为函数在上单调递增，而函数在上单调递减，

则函数在上单调递减，因此，解得，所以的取值范围是.故选.



**利用函数的单调性求参数的解题策略**

1.视参数为已知数，根据函数的图象或单调性的定义，确定函数的单调区间，先与已知单调区间比较，再求参数.

2.若函数在上是单调的，则该函数在的任意子集上也是单调的.

3.分段函数的单调性需要分段研究，不仅要保证每一段函数的单调性，还要注意每段端点值的大小.

##### 多维训练

1. [2024·徐州模拟]已知函数的图象关于直线对称，当且，时，恒成立，设，，，则，，的大小关系为( D ).

A. B. C. D.

[解析] 当且，时，恒成立，

在上单调递减，且的图象关于直线对称，在上单调递增，，

，，即.故选.

2. 已知函数的定义域为，且对任意两个不相等的实数，都有，则不等式的解集为( B ).

A. B. C. D.

[解析]不妨设，因为，

所以，故是上的增函数，所以原不等式等价于，解得.故选.

3. “”是“函数在上是单调函数”的( B ).

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]依题意得，函数是上的单调函数，

因为在上单调递增，所以在上单调递增，所以且，即，

所以“”是“函数在上是单调函数”的必要不充分条件.故选.